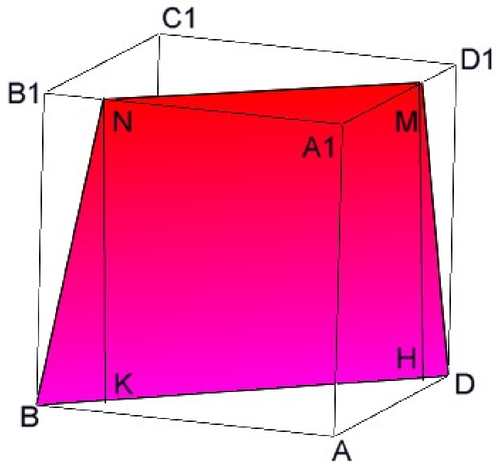
Сделаем чертеж и построим сечение, проходящее через точки B, D, M. Через точку M в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую, параллельную BD. Эта прямая пересечет сторону A_1B_1 в точке N. Полученный четырехугольник BDMN и будет искомым сечением.



Так как $MN||BD$, то BDMN - трапеция.

По условию:

$AB = AD = 20$,

$AA_1 = 7$,

$MD_1 : A_1M = 2 : 3$.

Проведем в трапеции высоты NK и MH. Требуется найти $S_{BDMN} = \frac{BD+MN}{2} \cdot NK$. Для того, чтобы найти искомую площадь, нужно найти BD, MN и NK.

Из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = B_1D_1.$$

Теперь найдем MN. Так как $MN||BD$, то $MN||B_1D_1$ и $\triangle A_1NM \sim \triangle A_1B_1D_1$. По условию $D_1M : MA_1 = 2 : 3$, поэтому A_1M составляет 3 части, а A_1D_1 - 5 частей и $A_1M : A_1D_1 = 3 : 5$. Тогда из подобия треугольников A_1NM и $A_1B_1D_1$ получаем соотношения:

$$\frac{A_1M}{A_1D_1} = \frac{A_1N}{A_1B_1} = \frac{NM}{B_1D_1} = \frac{3}{5},$$

$$MN = \frac{3}{5} \cdot B_1D_1 = \frac{3}{5} \cdot 20\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

$$A_1N = \frac{3}{5} \cdot A_1B_1 = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \Rightarrow B_1N = 20 - 12 = 8,$$

$$A_1M = \frac{3}{5} \cdot A_1D_1 = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \Rightarrow D_1M = 20 - 12 = 8.$$

Осталось найти высоту NK. Для этого сначала найдем боковые стороны трапеции MD и BN:

$$MD = \sqrt{DD_1^2 + MD_1^2} = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113},$$

$$BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113},$$

Получили, что $MD = BN = \sqrt{113}$, поэтому трапеция BDMN - равнобедренная. Тогда

$$BK = HD = \frac{BD - NM}{2} = \frac{20\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle BNK$ найдем по теореме Пифагора высоту NK:

$$NK = \sqrt{BN^2 - BK^2} = \sqrt{113 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{113 - 32} = \sqrt{81} = 9.$$

Теперь мы можем найти искомую площадь трапеции BDMN:

$$S_{BDMN} = \frac{BD + MN}{2} \cdot NK = \frac{20\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{2} \cdot 9 = 16\sqrt{2} \cdot 9 = 144\sqrt{2}.$$

Итак, площадь искомого сечения равна $144\sqrt{2}$.