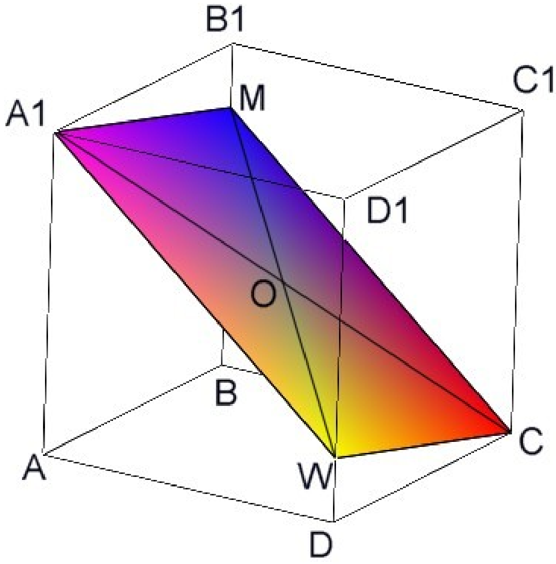
Задание С2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **известны ребра** $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. **Точка W принадлежит ребру** DD_1 **и делит его в отношении 1:4, считая от вершины D. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки** C, W **и** A_1**.**

Решение

Сделаем чертеж и построим сечение, проходящее через точки C, W и A_1. Через точку С в плоскости BB_1C_1C проведем прямую, параллельную A_1W. Эта прямая пересечет сторону BB_1 в точке М. Полученный четырехугольник CWA_1M и будет искомым сечением.



Так как $CM||A_1W$ и по условию $DW : WD_1 = 1 : 4$, то $B_1M : MB = 1 : 4$, откуда следует, что $CM = A_1W$.
И так как $CM||A_1W$ и $CM = A_1W$, то CWA_1M - параллелограмм.
Найдем его площадь.

$$B_1M : MB = 1 : 4 \ \Rightarrow BM = \frac{4}{5}BB_1 = \frac{4}{5}AA_1 = \frac{4}{5} \cdot 5 = 4;$$
$$B_1M = 5 - 4 = 1;$$

По теореме Пифагора из $\triangle CMB$ найдем сторону СМ:

$$CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}.$$

Аналогично из $\triangle A_1B_1M$ найдем A_1M:

$$A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}.$$

Так как в параллелограмме CWA_1M две смежные стороны равны, т.е. $A_1M = CM$, то четырехугольник CWA_1M - ромб. Диагонали ромба взаимноперпендикулярны, т.е. $A_1C \perp WM$, а площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S_{CWA_1M} = \frac{1}{2} A_1C \cdot MW.$$

Найдем диагонали ромба. A_1C - диагональ параллелепипеда, поэтому:

$$A_1C = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1D_1^2 + A_1A^2} = \sqrt{49 + 64 + 25} = \sqrt{138}.$$

Через O обозначим точку пересечения диагоналей A_1C и MW ромба CWA_1M. Тогда так как $A_1C \perp WM$, то по теореме Пифагора

$$MO = \sqrt{A_1M^2 - A_1O^2} = \sqrt{A_1M^2 - \left(\frac{A_1C}{2}\right)^2} = \sqrt{65 - \frac{138}{4}} = \frac{\sqrt{122}}{2};$$

$$MW = 2MO = \sqrt{122}.$$

$$S_{CWA_1M} = \frac{1}{2} A_1C \cdot MW = S_{CWA_1M} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{138} \cdot \sqrt{122} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4209} = \sqrt{4209}.$$

Получили искомую площадь.

Ответ: $\sqrt{4209}$**.**