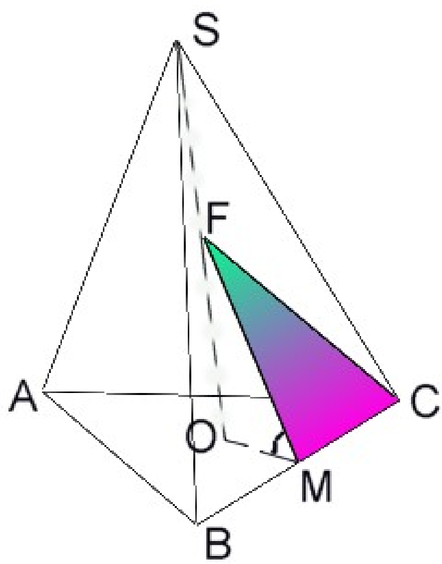
Задание C2 (ЕГЭ 2014. Математика.)

(Типовые тестовые задания/ И.Р. Высоцкий; под редакцией А.Л.Семенова, И.В.Ященко, 2014.)

Вариант 1.

В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S, все ребра которой равны 6, точка M - середина ребра BC, точка O - центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC.



Дано:

SABC - правильная пирамида,

AB = 6, AS = 6,

SF:FO = 1:2.

Решение

Сделаем чертеж и построим плоскость MCF, SO - высота пирамиды. Построим угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC. Искомым углом будет $\angle FMO$.

Действительно, углом между плоскостями называется угол между перпендикулярами в этих плоскостях к общей стророне BC. OM является частью высоты AM (т.к. O - центр $\triangle ABC$), $AM \perp BC \ \Rightarrow \ OM \perp BC$. OM - проекция FM на плоскость ABC и $OM \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $FM \perp BC$. Таким образом, FM и OM - перпендикуляры в плоскостях FMC и ABC к общей стороне BC, а значит $\angle FMO$ - искомый.

Найдем высоту AM в $\triangle ABC$:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$OM = r = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Высоту SO найдем по теореме Пифагора из $\triangle AOS$.

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AM = 2\sqrt{3},\ AS = 6,$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Так как по условию SF:FO = 1:2, то

$$FO = \frac{2}{3} \cdot SO = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Из $\triangle FOM$ найдем $\angle FMO$:

$$tg\angle FMO = \frac{FO}{OM} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\angle FMO = arctg\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $arctg\frac{4\sqrt{2}}{3}$**.**